Números reales

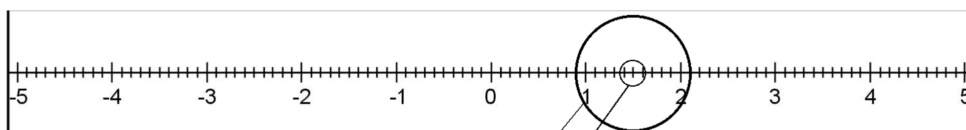
Un lugar para cada número

ACTIVIDAD 1

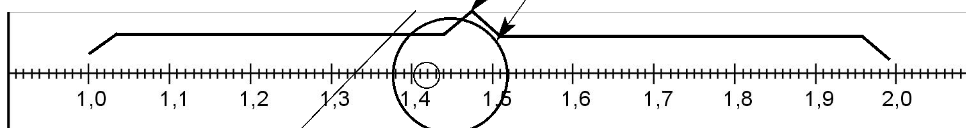
El número $\sqrt{2}$ es irracional. Si lo calculan con la calculadora, obtendrán un valor aproximado, ya que su expresión decimal tiene infinitos decimales, y la calculadora proporciona sólo 8 ó 10.

Vamos a analizar cómo pueden representarlo en la recta numérica. $\sqrt{2}$ es uno de los puntos comprendidos entre el 1 y el 2, porque $1^2 = 1$ y $2^2 = 4$, y $\sqrt{2}^2 = 2$, que está entre 1 y 4.

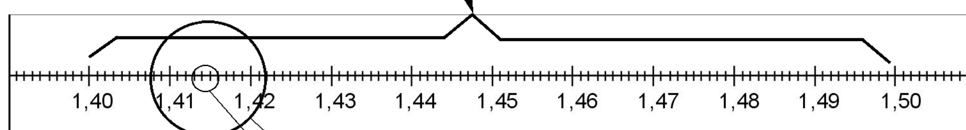
a. Podemos aproximarlo mejor, diciendo que está entre 1,4 y 1,5. ¿Por qué?



b. Podemos aproximarlo aún mejor, diciendo que está entre 1,41 y 1,42. ¿Por qué?

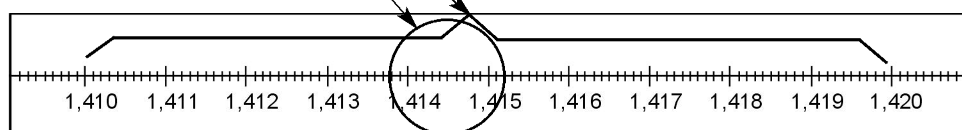


c. Podemos aproximarlo con un decimal más, diciendo que está entre 1,414 y 1,415. ¿Por qué?



Fíjense que cada uno de los gráficos de la recta numérica corresponde a una ampliación del anterior, ya que cambiamos la escala.

d. Intenten aproximarlo con un decimal más, e indíquenlo en un nuevo gráfico.



Siguiendo este proceso, cada vez encerraríamos el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ en un intervalo de menor amplitud, es decir, lograríamos mayor precisión.

Veamos ahora otra forma de encarar la tarea, que permite representar con precisión algunos irracionales[1]. Precisamos un resultado auxiliar:

a. Usando el teorema de Pitágoras, calculen la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

b. Dibujen un cuadrado sobre la recta numérica, haciendo coincidir un lado con el segmento $\overline{0\ 1}$. Tracen la diagonal que pasa por el 0.

c. Al hacer esta construcción, obtuvieron un triángulo con un lado sobre la recta numérica; ¿qué clase de triángulo es (teniendo en cuenta sus ángulos)? ¿Cuánto mide la diagonal que marcaron?

[1] Al menos en forma ideal (ya que en la práctica factores como el grosor del lapíz y errores inevitables de medición causan un resultado aproximado).



d. Tomen con el compás la medida de la diagonal y transporten sobre la recta numérica esta medida a partir del 0. ¿Qué número irracional están representando?

e. Construyan sobre la recta un rectángulo de base igual al segmento que marcaron y altura de longitud 1 y vuelvan a trazar la diagonal que pasa por el 0 ¿Qué número pueden representar con esta construcción?

f. Si el rectángulo que construyeron en el punto anterior tuviera altura de longitud 3, ¿cuál es el número que podrían representar?

g. ¿Cómo representarían $\sqrt{7}$?

Para reflexionar

- ¿Qué relación hay entre los puntos de la recta numérica y los números reales?
- ¿De qué manera se pueden construir los números de la forma $\sqrt{\alpha}$ utilizando el teorema de Pitágoras?

Una construcción del número de oro

En un segmento AB tomamos un punto P tal que los segmentos que determina con A y B verifican que:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$



Esta división del segmento se conoce como la "sección áurea" y el número que expresa la razón entre los segmentos se llama "número de oro" y habitualmente se anota con la letra griega Φ (phi).

a. Tomen como unidad la longitud de $\overline{AB}$. Calculen la longitud de $\overline{AP}$ y verifiquen que el valor de Φ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b. Representen este número con construcciones como las que hicieron en el ejercicio anterior.

Para investigar

Los griegos que seguían las teorías de Pitágoras observaron que el número de oro se encontraba al relacionar la diagonal y el lado de un pentágono regular.

Analicen esta relación.

